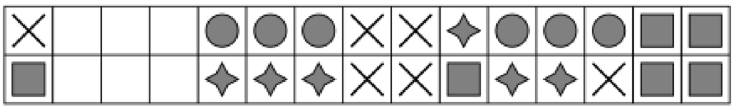
V Открытая олимпиада по математике школы №1543

5 класс. Решения. 1 февраля 2026

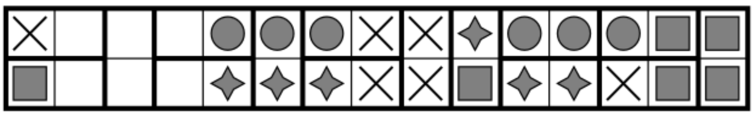
$\boxed{1}$ Мумрик, Хрюндель и Бармаглот питаются числами: Мумрик ест числа, делящиеся на 3, Хрюндель – числа, делящиеся на 7, а Бармаглот – числа, делящиеся на 11.
Однажды они в каком-то порядке подошли к забытой тетради по математике, и каждый съел из нее все числа, которые мог. Оказалось, что Мумрик съел 30, 42 и 96, Хрюндель – 28, 70 и 91, а Бармаглот – 66, 77 и 2222. В каком порядке они подходили к тетради?

Решение. Бармаглот, Мумрик, Хрюндель.
Бармаглоту достались числа 66 и 77, делящиеся на 3 и 7. Если бы он был не первым, то они бы уже были съедены другими. Так что он был первым. Аналогично, Мумрик был вторым, потому что ему досталось число 42, которое иначе съел бы Хрюндель.

$\boxed{2}$ Разделите прямоугольник на доминошки 1×2 так, чтобы все они получились разными.



Решение. Решение единственно.



$\boxed{3}$ Маша, Даша и Наташа – сестры-близнецы. Они учатся в одном классе, и различать их учителя так и не научились. В отместку они договорились врать, если к ним обратились неправильно, и говорить правду, если их имя не перепутали.
Сестры стоят в ряд перед учительницей. Она может задавать им вопросы про их имена, на которые можно ответить только «да» или «нет». Начать вопрос нужно с обращения. (Например, «Наташа, слева от тебя стоит Маша?») Как учительнице за три вопроса определить, как кого зовут?

Решение. Спросим обеих крайних сестер «Даша, в центре стоит Маша?» Если ответы одинаковые, то обе соврали (обе сказать правду не могли, поскольку одна из них не Даша). Значит, они обе не Даши, а Даша в центре. Спросим ее «Даша, слева стоит Наташа?», она ответит правду и мы все поймем.

Пусть ответы разные. Для определенности, пусть левая девочка сказала «да», а правая «нет». Тогда одна из них сказала правду, и ее зовут Даша. Есть два варианта:

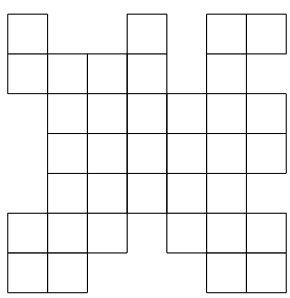
(а) Даша слева, тогда в центре Маша, справа Даша.

(б) Даша справа, тогда в центре Наташа, слева Маша.

Спросим центральную девочку «Даша, справа стоит Наташа?» Она точно соврет. Если она ответит «да», то это вариант (б), а если «нет» – то вариант (а).

Замечание. Также возможны «нечестные» решения, основанные на вопросах, которые логически корректны, но звучат глупо (особенно из уст учительницы). Например, «Маша, тебя зовут Даша?» или «Наташа, слева от тебя стоит Наташа?».
Такие решения жюри также принимало.

$\boxed{4}$ Можно ли разрезать фигурку на 3 части по линиям сетки и сложить из них квадрат?



Решение. Докажем от противного, что это невозможно. Допустим, что разрезать фигурку на 3 части и сложить из них квадрат получилось.

В фигурке 36 клеток, поэтому размеры квадрата 6×6. Рассмотрим четыре угловые клетки фигурки, две из них попадут в одну часть. Но между ними семь клеток (или даже больше, если это противоположные клетки). В квадрат 6×6 эта часть не влезет, противоречие.

$\boxed{5}$ Есть наклейки семи разных видов, они продаются наборами по четыре разных наклейки в каждом. Каждый набор упакован в непрозрачный конверт. Толя хочет подарить брату наклейки четырех разных видов, по две каждого вида. Какое мини-мальное число наборов ему нужно купить, чтобы такой подарок гарантированно получилось собрать?

Решение. Нужно купить 5 наборов. Обозначим виды наклеек А, Б, В, Г, Д, Е, Ж.
Четырех наборов может не хватить: если мы купили АБВГ, АБВД, АБВЕ, АБВЖ, то подарок не соберется. Докажем от противного, что пяти наборов хватит.

Пусть мы купили пять наборов, а подарок не собрался. У нас не более 5 наклеек каждого вида. Отложим сначала по одной наклейке каждого имеющегося у нас вида, их не больше 7. После этого осталось не более 3 видов, каждого вида не более $5-1=4$ наклеек. Суммарно получилось не более $7+3\cdot4=19$ наклеек, но мы их купили $5\cdot4=20$, противоречие.

$\boxed{6}$ В начале на экране компьютера была написана строчка из семи нулей и единиц, причем среди них была хотя бы одна единица. Каждую секунду компьютер вычислял сумму последних семи цифр в строке. Если эта сумма делилась на 3, то компьютер допечатывал в конец строки 0, а если не делилась – то 1. Компьютер остановился, когда длина строки стала равна 1000. Какое минимальное количество единиц могло оказаться в этой строке?

Решение. 374 единицы.
Оценка. Сначала заметим, что комбинация 10000000 невозможна (сумма первых семи цифр не делится на 3, так что восьмая цифра должна быть единицей, а не нулем). Так что, если где-то есть 7 нулей подряд, то перед ними тоже ноль. И перед ним ноль. И вообще все цифры до самого начала нули, что не так.

Теперь разобьем строку на 125 восьмерок подряд идущих цифр. Докажем, что в любой восьмерке, кроме первой, минимум три единицы.

• Если восьмерка заканчивается нулем, то сумма 7 цифр перед ним делится на 3. Но там не могут быть только нули, так что там хотя бы три единицы.

• Если восьмерка заканчивается цифрами 01, то среди семи цифр перед этим нулем хотя бы три единицы, из них хотя бы две в нашей восьмерке. Так что, считая последнюю единицу, получается хотя бы три.

• Если восьмерка заканчивается цифрами 011, то среди семи цифр перед этим нулем хотя бы три единицы, из них хотя бы одна в нашей восьмерке. Считая последние две единицы, получается хотя бы три.

• Если восьмерка заканчивается цифрами 111, то все доказано.

Среди первых семи цифр либо не менее двух единиц, либо ровно одна. Но во втором случае восьмая цифра в строке – единица. Значит, в первой восьмерке не менее двух единиц.
Суммарно выходит не меньше $3\cdot124+2=374$ единиц.

Пример: 00000011100000111... (дальше чередуются 5 нулей и 3 единицы, заканчивается ряд двумя единицами). Здесь в первой восьмерке две единицы, а во всех остальных по три, так что всего единиц 374.

Замечание. Еще можно заметить, что последовательность довольно быстро начинает зацикливаться с периодом 8. Доказать это можно, например, так. Рассмотрим момент, когда сумма восьми последних цифр делится на 3 (например, когда компьютер первый раз допечатает 0).
Если восьмерка начинается с нуля, то сумма семи последних цифр делится на 3, значит компьютер допечатает 0. Если же восьмерка начинается с единицы, то сумма семи правых цифр не делится на 3, и компьютер допечатает 1. Так что цифра повторилась, сумма в последней восьмерке по-прежнему делится на 3, так что можно повторять эти рассуждения и дальше.