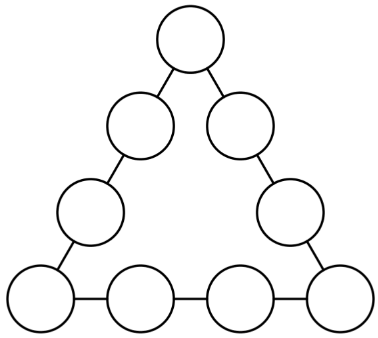
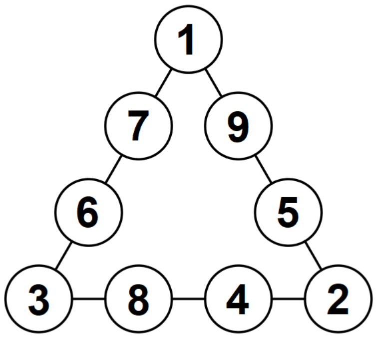
II Открытая олимпиада по математике школы №1543
4 класс. Устный тур.

1 Расставьте числа 1, 2, 3, . . . , 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.



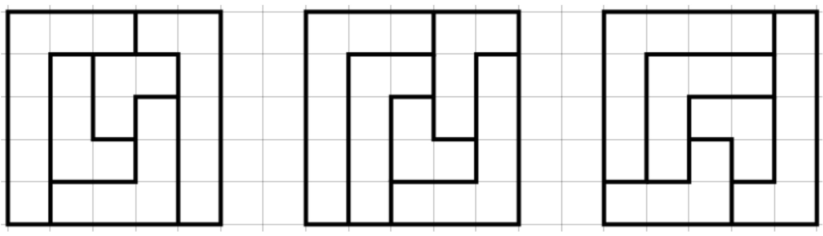
Ответ: Один из возможных вариантов приведен на рисунке, есть и другие:



Путь к решению: По условию задачи сумма четырех чисел на одной стороне равна 17. Если сложить все 12 чисел (три суммы по 4 слагаемых), то получится $17 \cdot 3 = 51$. Среди этих 12 чисел встречаются все числа 1, 2, 3, . . . , 9, причем три из них (угловые) по два раза. Так как $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, то сумма трех угловых чисел равна $51 - 45 = 6$. Значит, в угловых кружочках обязательно стоят числа 1, 2, 3. Остальные числа можно расставить подбором разными способами.

2 Покажите, как разрезать квадрат размером 5×5 клеток на «уголки» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из разного количества клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными.)

Ответ: три возможных варианта с разными формами уголков приведены на рисунке, есть и другие.



Путь к решению: Площадь квадрата — 25 клеток, а самого маленького «уголка» — 3 клетки. Представим число 25 в виде суммы различных слагаемых, начиная с трёх: $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, и разрежем квадрат на пять «уголков» с таким количеством клеток.

3 Тридцать шесть детей разного роста построились по росту. Детей выше Миши оказалось в шесть раз меньше, чем детей ниже Миши. А детей выше Маши оказалось вчетверо больше, чем детей ниже Маши. Сколько детей стоит между Мишей и Машей?

Ответ: 22. Решение: если дети выше Миши составляют одну часть, то дети ниже Миши — 6 частей. Кроме Миши детей 35, а частей 7. Значит, одна часть — это $35 : 7 = 5$ детей, и есть 5 детей выше Миши.

Теперь посмотрим на Машу. Если дети ниже ее составляют одну часть, то дети выше ее — четыре части. Кроме Маши детей 35, а частей 5. Поэтому одна часть —

это $35:5=7$ детей, а четыре части — $7\cdot 4=28$ детей. Итак, у нас есть 28 детей выше Маши. Пять из них выше Миши, а шестой — сам Миша. Поэтому между Машей и Мишей стоит $28-5-1=22$ ребенка.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Кот Леопольд хочет из восьми белых кубиков $1\times 1\times 1$ сложить белый куб размером $2\times 2\times 2$. Мыши задумали ему помешать, испачкав некоторые грани чёрной краской. Какое наименьшее число граней кубиков им надо испачкать, чтобы сложить полностью белый снаружи куб стало невозможно?

Ответ: 2. Решение: Для каждого кубика $1\times 1\times 1$ снаружи куба $2\times 2\times 2$ окажутся какие-то три грани, примыкающие к одной вершине.

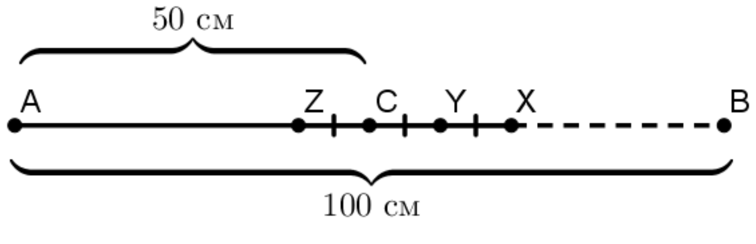
Если мыши испачкают две противоположных грани одного из кубиков, то к каждой вершине этого кубика будут примыкать две белых грани и одна чёрная, поэтому сложить полностью белый куб станет невозможно. А если только одну грань, то в этом кубике найдутся три белые грани, примыкающие к одной вершине.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Дрессированный муравей обычно ползёт со скоростью 10 см/мин, а если ему крикнуть «Беги!», то со скоростью 30 см/мин. Дрессировщик предлагает зрителю отрезать от метровой ленты любой кусочек, меньший её половины, и выкинуть его. Затем он пускает муравья бежать по остатку ленты и в какой-то момент кричит «Беги!».

Линейки у дрессировщика нет, но он может и до отрезания, и после него складывать ленту и отмечать на ней точки. Как ему действовать, чтобы муравей пробежал ленту ровно за 5 минут?

Решение: Обозначим концы изначальной ленты через A и B. До начала представления пусть дрессировщик сложит ленту пополам и отметит ее середину C. Зритель разрежет ленту в какой-то точке X и выбросит кусок XB. Остался кусок $XA>50$ см.

Пусть теперь дрессировщик приложит конец X к точке C и отметит середину Y отрезка CX. Затем пусть он сложит ленту в точке C и отметит точку Z напротив точки Y.

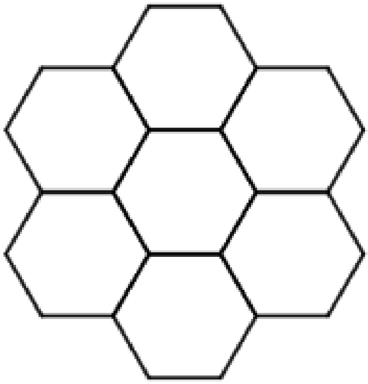


Получилось, что $AC=50$ см и $ZC=CY=YX$.

Дрессировщик запустит муравья бежать из точки A. Если не кричать «Беги!», то за 5 минут он проползет $5\cdot 10=50$ см и окажется в точке C. Пусть дрессировщик крикнет «Беги!», когда муравей будет в точке Z. Муравей ускорится в три раза и за оставшееся время пробежит втрое больше, чем пробежал бы без крика. То есть вместо отрезка ZC он пробежит втрое более длинный отрезок ZX и через пять минут окажется как раз в точке X.

$\boxed{6}$ В сотах живут пять пчёл, каждая в своей ячейке (две ячейки пустые). Их зовут Альфред, Бенджамин, Вильгельм, Генри и Джейкоб. Про них известно следующее:

- Альфред живёт правее Вильгельма.
- Бенджамин и Джейкоб — не соседи.
- Вильгельм живёт выше Бенджамина, но ниже Альфреда.
- У Джейкоба соседей больше, чем у Альфреда.
- У Генри больше всех соседей.

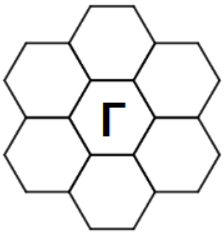


Покажите, как могут жить пчёлы, расставив в ячейках буквы А, Б, В, Г, Д. Найдите все варианты и докажите, что других нет.

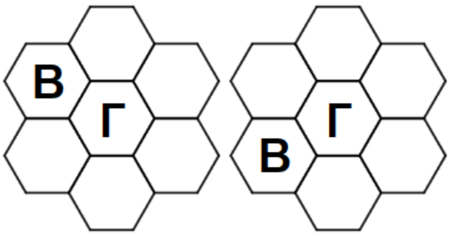
Решение:

1. Если в центре никто не живет, то у всех пчел максимум по два соседа. У Генри соседей больше всех, поэтому у остальных пчёл максимум по одному соседу. Но рассадить их так не получится, места слишком мало.

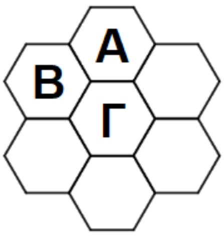
   Поэтому в центре кто-то живет. Он сосед всем остальным пчелам, поэтому это Генри.



2. Вильгельм живет выше Бенджамина, но ниже Альфреда, поэтому он точно не может жить ни в самой верхней, ни в самой нижней из ячеек. Еще Вильгельм живет левее Альфреда, поэтому он может жить только в одной из двух левых ячеек.

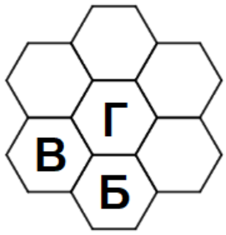


3. Пусть Вильгельм живет слева-сверху. Тогда Альфред живет еще выше него, на самом верху.

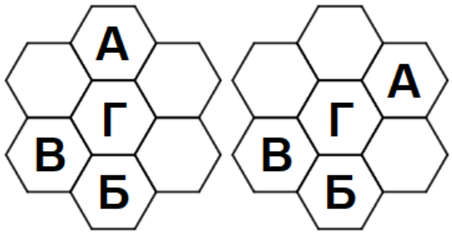


   У Альфреда два соседа. У Джейкоба соседей больше, поэтому их минимум трое. Бенджамин Джейкобу не сосед, поэтому три соседа Джейкоба — это Альфред, Вильгельм и Генри. Но ячейки, соседней со всеми тремя, нет. Получается, что этот случай невозможен.

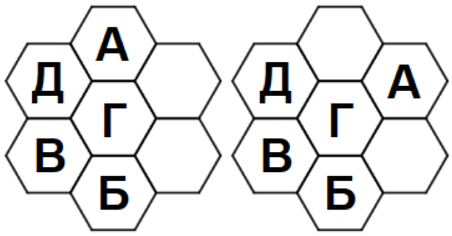
4. Теперь пусть Вильгельм живет слева-снизу. Тогда Бенджамин живет еще ниже, в самом низу.



Есть два варианта, где может жить Альфред: в самом верху или сверху-справа.



В каждом из этих случаев есть только одна ячейка, куда можно поселить Джейкоба, чтобы он не был соседом Бенджамина, а соседей у него было больше, чем у Альфреда.



Оба получившихся способа подходят под все условия.

$\boxed{7}$ Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но при разбиении любой из куч на две появлялись бы кучи с одинаковым числом орехов.

<u>Решение:</u> Положим в кучки 1, 3, 5, 7, . . . , 19 орехов, в сумме как раз получится 100. При попытке разбить кучку из нечетного числа орехов на две, в одной из частей окажется меньшее нечетное число орехов, что и даст совпадение.