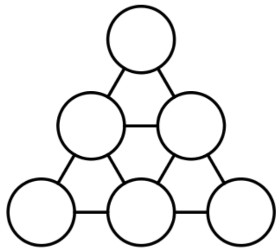
II Открытая олимпиада по математике школы №1543

5 класс 5 февраля 2023

1 В подземелье семь пронумерованных дверей, закрытых волшебными замками. Маг знает три заклинания, каждое из них открывает три замка. Если произнести заклинания «Сезам, откройся!» и «Алохомора!», то откроются двери 2, 3, 5 и 7. Если произнести «Тук-тук!» и «Сезам, откройся!», то откроются все двери, кроме 5. А сколько дверей откроется, если произнести заклинания «Тук-тук!» и «Алохомора!»?

Ответ: 6 дверей. Решение: Заклинание «Сезам, откройся!» не открывает дверь 5. Значит, оно открывает 2, 3 и 7. Тогда «Тук-Тук!» открывает 1, 4 и 6, а «Алохомора!» — дверь 5 и еще две из 2, 3, 7. Суммарно они откроют 6 дверей.

2 Паук поймал Муху-Цокотуху в треугольную паутину (на рисунке справа) и предлагает ей сыграть в игру. Муха назовёт шесть различных натуральных чисел, а Паук расставит их в кружочки на паутине так, как захочет. Если в каждой паре кружочков, соединённых линией, одно из чисел будет делиться на другое без остатка, то Паук отпустит Муху. Но если хотя бы в одном месте это правило нарушится, то её съедят. Сможет ли Муха спастись?



Ответ: сможет. Решение: Муха может назвать, например, числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. В любой паре чисел из этих шести одно делится на другое, поэтому при любой расстановке чисел в кружочки условие Паука будет выполнено.

3 На острове живут только рыцари (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и подражатели (лгут, обращаясь к лжецам, а остальным говорят правду). Трое островитян, Ол, Имп и Ада, сказали друг другу так:

Ол — Импу: «Ты подражатель».

Имп — Аде: «Нет, я не подражатель».

Ада — Олу: «Да среди нас подражателей вообще нет!»

Сколько лжецов участвовало в этом разговоре?

Ответ: один лжец. Решение: Разберем три случая:

• Если Ол — рыцарь, то Имп — подражатель, а Ада — лжец.

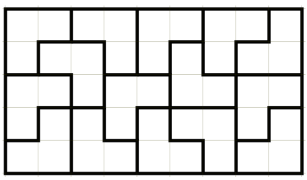
• Если Ол — лжец, то Имп не подражатель. Тогда он рыцарь. Тогда Ада не может быть лжецом, поскольку в этом случае она скажет правду.

• Имп не может быть лжецом, иначе он скажет правду. Поэтому, если Ол подражатель, то он говорит правду, а значит Имп тоже подражатель. Следовательно, Имп врёт, значит он обращается к лжецу, и Ада лжец.

Таким образом, в каждом случае лжецом является кто-то один.

4 Разрежьте какой-нибудь клетчатый прямоугольник по линиям сетки на нечётное число равных фигурок, не являющихся прямоугольниками.

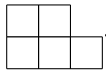
Ответ: Например, прямоугольник 5×9 можно разрезать на 15 трёхклеточных уголков.



Путь к решению: Самая простая фигурка, не являющаяся прямоугольником — это уголок из трёх клеток. Если прямоугольник разрезается на нечётное число уголков, то длины обеих его сторон нечётны, а одна из этих длин делится на 3.

Несложно убедиться, что прямоугольники $3 \times (2n+1)$ на уголки разрезать нельзя. Значит, одна из сторон прямоугольника не меньше 9. Можно выбрать любой прямоугольник 5×9, 7×9, $9 \times 9 \ldots$ и, скорее всего, он с первой или второй попытки разрежется на уголки.

Замечание: Никакой прямоугольник нельзя разрезать на нечётное число равных непрямоугольных фигурок из четырёх клеток, это можно доказать, используя шахматную и полосатую раскраски клеток.

Никакой прямоугольник $5\times n$ нельзя разрезать на нечётное число пятиклеточных фигурок . А вот квадрат 15×15 можно разрезать на 45 таких фигурок.

$\boxed{5}$ Когда олимпиада закончилась, пятиклассники и шестиклассники высыпали на улицу и устроили рыцарский турнир на снежках. Турнир состоял из нескольких поединков один на один, друг с другом могли биться школьники как из одной параллели, так и из разных. Когда пришли родители и турнир пришлось завершить, оказалось, что пятиклассники выиграли на 15 поединков больше и проиграли на 43 поединка больше, чем шестиклассники. Кто выиграл больше поединков между школьниками из разных параллелей, пятиклассники или шестиклассники? На сколько?

Ответ: шестиклассники выиграли на 14 поединков больше.

Решение: Выдадим школьникам помногу конфет так, чтобы у пятиклассников и у шестиклассников суммарно конфет было поровну. Пусть после каждого поединка проигравший отдает одну конфету победителю. Сравним количество конфет у пятиклассников и у шестиклассников после турнира.

Поединки между ребятами одного и того же класса на конфеты не повлияли. Пятиклассники получили на 15 конфет больше, чем шестиклассники, и отдали на 43 конфеты больше. После турнира у них осталось на $43-15=28$ конфет меньше.

Каждый поединок между пятиклассником и шестиклассником, в котором победил шестиклассник, увеличивает эту разность на две конфеты (а если победил пятиклассник — то уменьшает). Поэтому шестиклассники выиграли на $28:2=14$ таких поединков больше.

$\boxed{6}$ Из 4 монет одна фальшивая, она отличается от настоящей по весу неизвестно в какую сторону. Чашечные весы работают правильно, если груз на одной из чаш тяжелее, чем на другой, а при равенстве могут показать, что угодно. Как найти фальшивую монету за три взвешивания?

Идея решения: Будем каждый раз взвешивать все четыре монеты. Тогда равенства точно не будет, и показаниям весов можно будет доверять.

Решение: Взвесим 2 монеты на одной чаше и 2 на другой. Назовем монеты на более легкой чаше А и Б, а на более тяжелой В и Г (АБ $<$ ВГ). После этого взвесим АВ с БГ, а потом АГ с БВ. Разберем четыре случая:

- АВ $<$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда все монеты, кроме А, побывали и на более легкой, и на более тяжелой чаше, поэтому они не могут быть фальшивыми. Следовательно, фальшивая А (и она легче настоящей).
- АВ $<$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая Г, которая все три раза была на более тяжелой чаше.
- АВ $>$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда фальшивая В, которая все три раза была на более тяжелой чаше.
- АВ $>$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая Б, которая все три раза была на более легкой чаше.

$\boxed{7}$ В клетки квадрата 4×4 вписали числа. Оказалось, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 40, а в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 90. Докажите, что сумма чисел в двух противоположных углах квадрата равна 20.

Решение: Выделим 4 квадрата 2×2 как на рисунке слева. Если сложить суммы чисел в них, то числа в центральных квадратах посчитаются по два раза, а в крайних – по одному. В сумме будет $40\cdot 4=160$.

Затем выделим два квадрата 3×3 как на рисунке справа. Если их сложить, то числа в центральных квадратиках по-прежнему посчитаются по два раза, числа в крайних – по одному разу, а еще добавятся два числа в противоположных углах. В сумме будет $90\cdot 2=180$. Таким образом, сумма чисел в угловых квадратиках будет равна $180-160=20$.