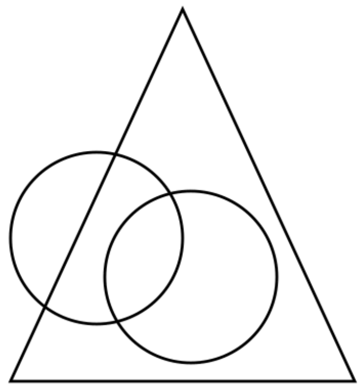
III Открытая олимпиада по математике школы №1543

5 класс **Решения** 4 февраля 2024



1 Отметьте на рисунке как можно меньше точек так, чтобы количество точек во всех пяти областях было разным (но не менее одной), а всего в каждом из двух кругов точек оказалось вдвое меньше, чем в треугольнике. На линиях ставить точки нельзя.

Решение: Минимально возможное число точек это $1+2+3+4+5=15$. Столько можно отметить: например в кругах 3, 1, 2, 4 слева направо и 5 в треугольнике. Есть и другие варианты.

2 В магазине сладостей на этой неделе действуют три акции.

- Каждому 3-му покупателю — шоколадка в подарок!
- Каждому 30-му покупателю — 3 шоколадки в подарок!
- Каждому 150-му покупателю – 10 шоколадок в подарок!

Акции не суммируются (то есть 150-й покупатель получит только 10 шоколадок, а не 14). За неделю в магазине побывало 1543 покупателя. Сколько шоколадок ушло им на подарки?

Решение 1: Давайте чуть изменим условия акций. Пусть каждый 3-й получает 1 шоколадку, каждый 30-й получает 2 шоколадки, а каждый 150-й – 7 шоколадок, но при этом акции будут суммироваться.

Поскольку $1543:3=514$ (ост. 1), $1543:30=51$ (ост. 13) и $1543:150=10$ (ост. 43), то на подарки уйдет 514 шоколадок по первой акции, $51\cdot 2=102$ шоколадки по второй акции и $10\cdot 7=70$ шоколадок по третьей акции. Всего $514+102+70=686$.

Решение 2: Можно честно посчитать, сколько покупателей получило шоколадки по каждой акции. Поскольку $1543:150=10$ (ост. 43), то было 10 150-х покупателей, они получили по 10 шоколадок. Далее, $1543:30=51$ (ост. 13), поэтому было 51 30-х покупателей, из них $51-10=41$ получили по 3 шоколадки. Также $1543:3=514$ (ост. 1), поэтому было 514 3-х покупателей, из них $514-41-10=463$ получили по одной шоколадке.

Итого $10\cdot 10+41\cdot 3+463=686$ шоколадок.

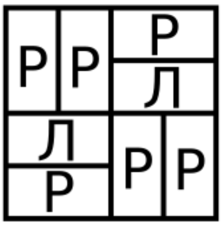
3 У Коли есть пять карточек с цифрами 1, 3, 5, 7, 9, плюсы, минусы и кусочки скотча, с помощью которых можно склеить две цифры в одно число. Он хочет составить из всех пяти цифр выражение, значение которого равно 43. Какое наименьшее число кусочков скотча ему понадобится? (Превращать 9 в 6 нельзя.)

Решение: Два кусочка. Ноль не может быть, потому что тогда можно сделать максимум $1+3+5+7+9=25$. Один не может быть, потому что тогда будут складываться или вычитаться 4 нечетных числа, и результат будет четным.

Два может быть, например $15+37-9=43$.

$\boxed{4}$ Тридевятое царство — это квадрат 4×4. Царь разделил его на 8 прямоугольных областей 1×2 и в каждой области посадил наместником боярина-рыцаря или боярина-лжеца. Оказалось, что каждый боярин может сказать «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов». Какое наибольшее число бояр-рыцарей могло быть? (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут. Соседство считается по стороне.)

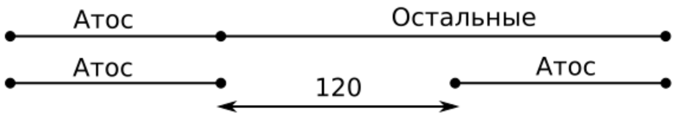
Решение: 6 рыцарей. Пример вот:



Докажем, почему не могло быть большего количества рыцарей. У каждого рыцаря обязательно должен быть сосед-лжец, поэтому 8 рыцарей быть не могло. Но и 7 тоже быть не могло, поскольку тогда единственный лжец должен быть соседом для всех 7 рыцарей. Но у области с этим лжецом периметр 6 и поэтому может быть максимум 6 соседей, противоречие.

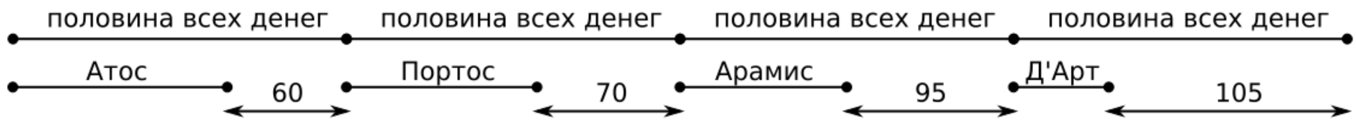
$\boxed{5}$ Четыре мушкетёра подсчитывают свои деньги. У Атоса на 120 пистолей меньше, чем у остальных трёх вместе взятых. У Портоса на 140 пистолей меньше, чем у остальных. У Арамиса на 190 пистолей меньше, чем у остальных. У Д'Артаньяна на 210 пистолей меньше, чем у остальных. Сколько пистолей у каждого мушкетёра?

Решение: Изобразим отрезками условие про Атоса.



Разрезав картинку пополам, поймем, что у Атоса на 60 пистолей меньше половины общих денег.

Аналогично получаем, что у Портоса на 70 пистолей меньше половины, у Арамиса на 95 и у Д'Артаньяна на 105. Нарисуем это на отрезочках.



Сверху удвоенные общие деньги, а снизу общие деньги и еще 330 пистолей. Поэтому всего денег у мушкетеров 330 пистолей. Половина этих денег равна 165 пистолям. Тогда у Атоса 105 пистолей, у Портоса 95, у Арамиса 70 и у Д'Артаньяна 60.

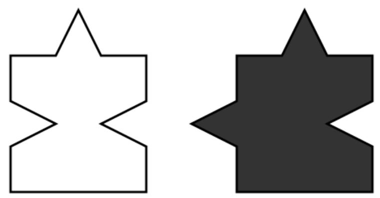
Также эту задачу можно было решать при помощи уравнений, многие ребята так и делали.

6 Петя и Вася играют в игру. У них есть 16 гирек массой 1 г, 2 г, 3 г,..., 16 г и чашечные весы. Весы могут находиться в трёх состояниях: равновесие, левая чаша перевешивает, правая чаша перевешивает. Мальчики по очереди кладут на весы по одной гире (гирю и чашу они выбирают сами) так, что после каждого хода весы должны менять состояние. Начинает Петя. У кого нет хода — выигрывает. Кто победит при правильной игре?

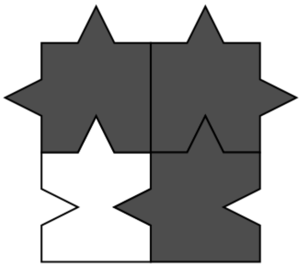
Решение: Победит Петя. Первым ходом он кладет 15 на левую чашу. Вася обязан положить 16 на правую. Тогда Петя кладет 14 на левую, Вася обязан положить 13 на правую. Теперь у нас опять равновесие. Аналогичные ходы повторяем еще три раза. Вася каждый раз может совершить один-единственный ход, никаких развилок в алгоритме не будет. В конце Вася положит последнюю гирю и проиграет.

Комментарий: Такая же стратегия для Пети работает для любого четного числа гирек. При помощи компьютерных вычислений было проверено, что при нечетном числе гирек всегда может выиграть Вася, но его стратегия жюри неизвестна. Если кто-нибудь сможет придумать стратегию для нечетного числа гирек и доказать, что она работает, можете написать на e-mail `mat@1543.msk.ru` и рассказать свое решение жюри, мы будем благодарны.

7 Детали математического паззла — квадраты с одинаковыми выступами и вырезами, точно подходящими друг другу. Есть 75 чёрных деталей и 25 белых (см. рисунок). Их можно поворачивать и переворачивать. Можно ли сложить их в виде полоски 2×50 (возможно, с выступами и вырезами на краях)?



Решение: Да, можно. Из трех черных и одной белой детали можно сложить квадрат 2×2.



Чередуя такие квадраты и перевернутые, складываем горизонтальную полоску длиной $25 \cdot 2 = 50$.

Комментарий: А вот квадрат 10×10 сложить из этих плиток нельзя. Это можно доказать, подсчитав общее число выступов и вырезов и убедившись, что некоторым выступам не хватит ни вырезов, ни места на наружной границе.

Такие плитки с разным количеством выступов и вырезов в них тесно связаны с открытой математической задачей о *числах Хееша*. Более подробно можно прочитать по ссылкам (они кликабельны):

https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/435227/Plitki_i_chisla_Kheesha

https://elementy.ru/kartinka_dnya/1411/Rekordnyy_mnogougolnik_Kheesha

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%A5%D0%B5%D0%B5%D1%88%D0%B0