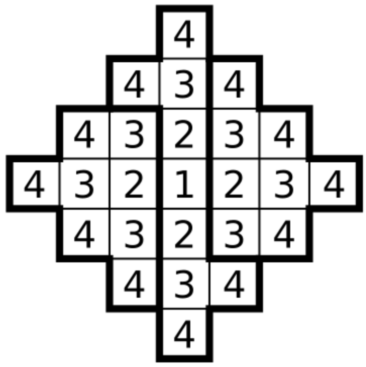
I Открытая олимпиада по математике в школе 1543

5 класс. Решения.

1 Разрежьте фигурку справа на 3 части так, чтобы суммы чисел во всех трёх частях были равны.

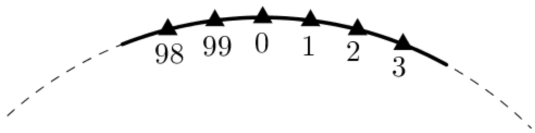


Решение: Сумма чисел в каждой части равна 27. В каждой части обязательно по 4 четверки. Примеров бывает много разных.

2 На ролевой игре эльфов оказалось на 15 меньше, чем гномов и гоблинов вместе взятых. А гоблинов — на 43 меньше, чем эльфов и гномов, вместе взятых. Сколько гномов участвовали в игре?

Решение:
Эльфы + 15 = Гномы + Гоблины
Гоблины + 43 = Эльфы + Гномы.
Эльфы + Гоблины + 58 = Эльфы + Гоблины + 2 * Гномы.
2 * Гномы = 58
Гномы = 29.

3 Вдоль кольцевой дороги длиной 100 км установлены километровые столбы с номерами от 0 до 99.

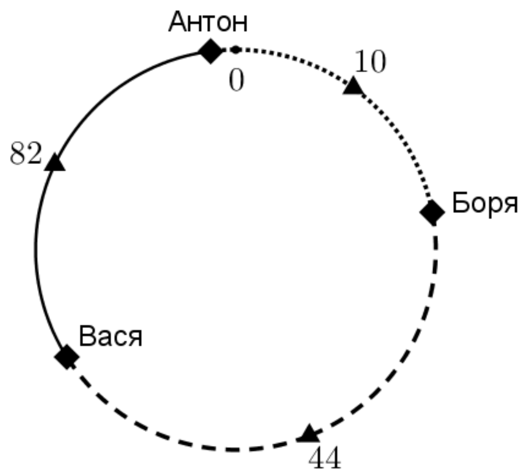


Рядом с какими-то тремя столбами находятся машины Антона, Бори и Васи. Все они ездят с одинаковой скоростью. Если по кратчайшему пути навстречу друг другу поедут Антон и Боря, то они встретятся у столба 10. Если Боря и Вася — то у столба 44. А если Вася и Антон — то у столба 82. У каких столбов стоят машины?

Решение:

Когда две машины едут навстречу друг другу по кратчайшему расстоянию, то они вместе проезжают не больше 50 км. А значит, каждой машине до точки встречи нужно проехать не больше 25 км.

Отметим на окружности точки 10, 44 и 82. Найдём расстояния между ними: $44-10=34$, $82-44=38$ и $100-82+10=28$. Все они больше 25. Отсюда следует, что одна из двух машин, Антона и Бори, расположена между 82 и 10, а другая — между 10 и 44. Аналогично из двух машин, Бори и Васи, одна расположена между 10 и 44, а другая — между 44 и 82. Поэтому машины расположены так, как изображено на рисунке:



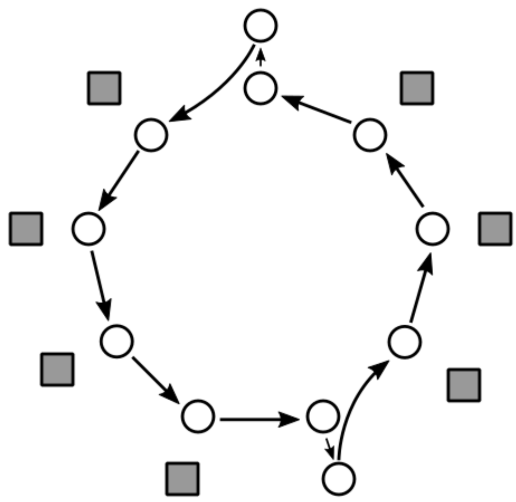
Равные дуги отмечены одинаковыми типами линий.

Если ехать от Антона до Васи через Борю, то пройденное расстояние будет вдвое больше, чем от точки 10 до точки 44. Значит, длинная дуга между Антоном и Васей равна $2 \cdot (44 - 10) = 68$, а короткая — $100 - 68 = 32$. Значит, от точки 82 до Антона нужно ехать $32 : 2 = 16$. Итого, машина Антона стоит у таблички 98. Дальше легко вычислить, что машина Бори стоит у таблички 22, а машина Васи — у таблички 66.

$\boxed{4}$ На занятие по бальным танцам пришли 11 девочек и 7 мальчиков. Учитель разбил их на пары и поставил по кругу для первого танца, двум девочкам пришлось танцевать за кавалера. Чтобы партнёры менялись, учитель придумал такую схему: после каждого танца обе девочки-«кавалера» меняются ролями со своей дамой, а затем все дамы переходят к следующему по часовой стрелке кавалеру.

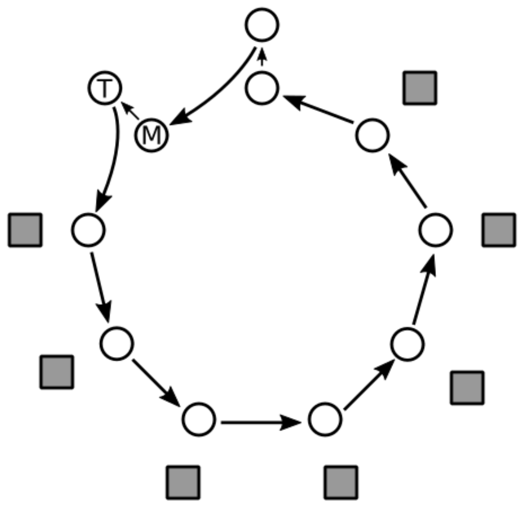
Первый танец Маша и Таня танцевали вместе. Какое наибольшее число танцев может пройти, прежде чем они вновь станцуют друг с другом?

<u>Решение:</u> Схематично изобразим происходящее: пусть серые квадраты — мальчики, а белые круги — девочки. Во внешнем круге стоят «кавалеры», а во внутреннем – дамы.



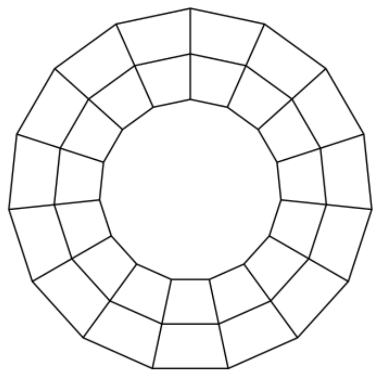
Мальчики стоят неподвижно, а девочки перемещаются по кругу вдоль стрелок, не меняя порядка. Действительно, если девочка танцевала с мальчиком, то она просто переходит к следующему кавалеру. Если девочка танцевала в роли «дамы» с другой девочкой, то на следующем танце она заменяет ее на месте кавалера. А девочка-«кавалер» становится дамой у следующего кавалера.

Если Маша и Таня танцевали друг с другом, то в этом кругу из девочек они стоят рядом (будем считать, что Таня первая, и, значит, танцевала за кавалера). В следующий раз они станцуют друг с другом, когда Таня придёт в следующий промежуток между мальчиками. Чтобы этот случилось как можно позже, Таня по дороге от одного промежутка до другого должна станцевать со всеми 7 мальчиками.



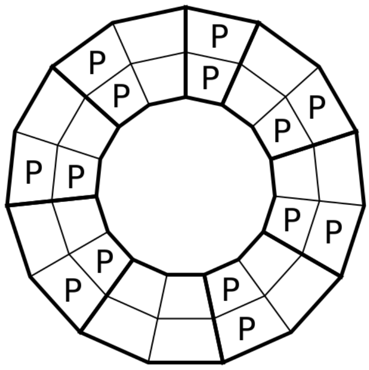
Соответственно, Таня станцует с Машей, потом с 7 мальчиками, потом в роли дамы с девочкой перед собой и, наконец, опять станцует с Машей в роли кавалера. Итого, второй раз Таня станцует с Машей, самое позднее, на 10 танце.

$\boxed{5}$ В кольцевом замке 30 комнат, расположенных как на рисунке справа. В некоторых комнатах живут рыцари, которые всегда говорят правду, а в некоторых других комнатах шуты, которые всегда врут. (В каждой комнате живёт не больше одного человека, комнаты могут быть пустыми.) У каждого есть хотя бы один сосед по стороне. Все жители замка произнесли фразу: «Ровно половина моих соседей — шуты.» Какое максимальное число рыцарей может жить в этом замке?



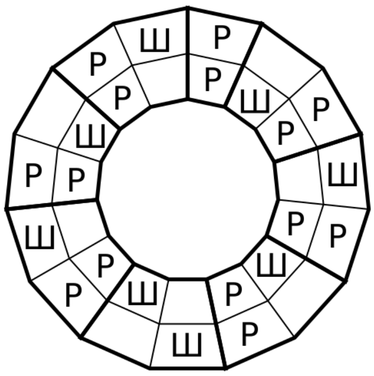
<u>Решение:</u> У каждого рыцаря есть один сосед-рыцарь и один сосед-шут. Значит, рыцари разбиваются на пары соседей, и их чётное число.

Разобьем замок на 7 квадратов 2×2 и одну доминошку 1×2. В каждом квадрате не больше 2 рыцарей, значит, всего рыцарей не больше $7 \cdot 2 + 2 = 16$. Попробуем расставить 16 рыцарей: в каждый квадрат нужно поставить по 2, и в доминошку тоже 2. На картинке видно, что так сделать нельзя: рыцари безальтернативно ставятся в дальнюю от доминошки часть квадрата, но тогда круг не замыкается.



Есть и другой вариант оценки. Рассмотрим все 15 возможных квадратов 2×2*. В каждом из них не больше 2 рыцарей, а каждый рыцарь принадлежит ровно двум квадратам. Поэтому рыцарей не больше 15. Поскольку их четное число, то их не больше 14.*

Значит, 16 рыцарей расставить не получилось. А 14 расставить можно:



$\boxed{\mathbf{6}}$ Есть 13 монет, одна из них фальшивая (она легче настоящей) и чашечные весы с монетоприёмником. Перед каждым взвешиванием нужно опустить в монетоприёмник одну из монет. Если монета была настоящая, то весы покажут правдивый результат взвешивания. А если фальшивая, то они могут показать что угодно. Как найти 10 настоящих монет, чтобы расплатиться ими на рынке? (Монеты, уже опущенные в весы, обратно не вытряхиваются.)

<u>Решение:</u> Для решения достаточно считать, что на каждом шагу мы платим настоящей монетой, и показания весов верные. Действительно, если мы на каком-то шагу заплатили фальшивой монетой, то у нас остались только настоящие, и любые 10 монет, которые мы каким-либо образом выделим, нам подойдут.

Заплатим одну монету, и взвесим по 4 монеты на каждой из чаш. Если какая-то из чаш перевесила, то фальшивая монета на более легкой чаше. Если же весы в равновесии, то фальшивая монета находится среди 4 оставшихся. Итак, мы выделили 8 точно настоящих монет и 4 непонятно каких (назовем их подозрительными).

Заплатим одной из четырех подозрительных монет, и взвесим по одной подозрительной монете на каждой из чаш. Если одна чаша легче другой, то фальшивая монета на ней. Если весы в равновесии, то на них две настоящие монеты. Итого мы нашли $8 + 2 = 10$ настоящих монет.

$\boxed{\mathbf{7}}$ На доске 8×8 стоят 33 шахматных коня. Докажите, что какой-то из них бьёт хотя бы двух других.

Решение: Разобьем доску на 4 квадрата 4×4, в каком-то из них не меньше 9 коней. Разделим клетки этого квадрата на 4 группы следующим образом:

2	3	4	1
4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2

По принципу Дирихле, в какой-то из этих групп хотя бы 3 коня. Тогда один из них обязательно бьет двух других.