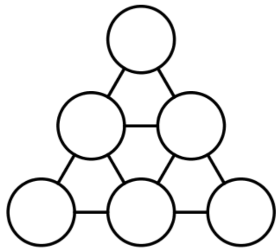
II Открытая олимпиада по математике школы №1543

6 класс

5 февраля 2023

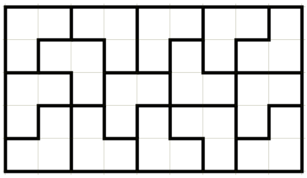


$\boxed{1}$ Паук поймал Муху-Цокотуху в треугольную паутину (на рисунке справа) и предлагает ей сыграть в игру. Муха назовёт шесть различных натуральных чисел, а Паук расставит их в кружочки на паутине так, как захочет. Если в каждой паре кружочков, соединённых линией, одно из чисел будет делиться на другое без остатка, то Паук отпустит Муху. Но если хотя бы в одном месте это правило нарушится, то её съедят. Сможет ли Муха спастись?

Ответ: сможет. Решение: Муха может назвать, например, числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. В любой паре чисел из этих шести одно делится на другое, поэтому при любой расстановке чисел в кружочки условие Паука будет выполнено.

$\boxed{2}$ Разрежьте какой-нибудь клетчатый прямоугольник по линиям сетки на нечётное число равных фигурок, не являющихся прямоугольниками.

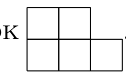
Ответ: Например, прямоугольник 5×9 можно разрезать на 15 трёхклеточных уголков.



Путь к решению: Самая простая фигурка, не являющаяся прямоугольником — это уголок из трёх клеток. Если прямоугольник разрезается на нечётное число уголков, то длины обеих его сторон нечётны, а одна из этих длин делится на 3.

Несложно убедиться, что прямоугольники $3 \times (2n+1)$ на уголки разрезать нельзя. Значит, одна из сторон прямоугольника не меньше 9. Можно выбрать любой прямоугольник 5×9, 7×9, $9 \times 9 \ldots$ и, скорее всего, он с первой или второй попытки разрежется на уголки.

Замечание: Никакой прямоугольник нельзя разрезать на нечётное число равных непрямоугольных фигурок из четырёх клеток, это можно доказать, используя шахматную и полосатую раскраски клеток.

Никакой прямоугольник $5 \times n$ нельзя разрезать на нечётное число пятиклеточных фигурок . А вот квадрат 15×15 можно разрезать на 45 таких фигурок.

$\boxed{3}$ Когда олимпиада закончилась, пятиклассники и шестиклассники высыпали на улицу и устроили рыцарский турнир на снежках. Турнир состоял из нескольких поединков один на один, друг с другом могли биться школьники как из одной параллели, так и из разных. Когда пришли родители и турнир пришлось завершить, оказалось, что пятиклассники выиграли на 15 поединков больше и проиграли на 43 поединка больше, чем шестиклассники. Кто выиграл больше поединков между школьниками из разных параллелей, пятиклассники или шестиклассники? На сколько?

Ответ: шестиклассники выиграли на 14 поединков больше.

Решение: Выдадим школьникам помногу конфет так, чтобы у пятиклассников и у шестиклассников суммарно конфет было поровну. Пусть после каждого поединка проигравший отдает одну конфету победителю. Сравним количество конфет у пятиклассников и у шестиклассников после турнира.

Поединки между ребятами одного и того же класса на конфеты не повлияли. Пятиклассники получили на 15 конфет больше, чем шестиклассники, и отдали на 43 конфеты больше. После турнира у них осталось на $43 - 15 = 28$ конфет меньше.

Каждый поединок между пятиклассником и шестиклассником, в котором победил шестиклассник, увеличивает эту разность на две конфеты (а если победил пятиклассник — то уменьшает). Поэтому шестиклассники выиграли на $28 : 2 = 14$ таких поединков больше.

$\boxed{4}$ В классе 25 учеников. Каждый назвал число своих друзей среди одноклассников. Оказалось, что каждый ошибся в подсчётах ровно на 1 в ту или другую сторону. Могла ли сумма названных чисел быть равной 100?

Ответ: не могла. Решение: Если бы никто из учеников не ошибся, то сумма названных чисел была бы равна удвоенному числу пар друзей, т.е. была бы чётной. Так как число учеников нечётно, и каждый из них ошибся на 1, то сумма названных чисел нечётна, поэтому она не могла быть равна 100.

$\boxed{5}$ На складе есть два тёмных чулана: в первом хранятся сапоги на левую ногу: 15 чёрных, 9 синих и 9 зелёных. А во втором хранятся сапоги на правую ногу: 19 чёрных, 5 синих и 5 зелёных. Пётр приносит несколько сапог из первого чулана, а Василий из второго. Какое минимальное количество сапог им нужно принести, чтобы из них гарантировано можно было составить хотя бы одну пару? (За сапогами Пётр и Василий идут одновременно, набирают их не глядя, но перед этим они могут договориться, сколько именно сапог каждый должен принести.)

Ответ: 25 сапог. Решение: Петр приносит 19 левых сапог, а Василий — 6 правых. Тогда пара обязательно соберется. Действительно, Петр обязательно принес хотя бы один черный сапог и хотя бы один синий или зеленый. Василий мог принести черный сапог, и тогда есть черная пара. А если он черных сапог не приносил, то он принес хотя бы один синий и хотя бы один зеленый сапог, и тогда есть пара с цветным сапогом Петра.

Покажем, что 25 сапог — это минимальное количество.

Если Василий принес 5 сапог или меньше, то они могут быть все синие, а значит Петру нужно принести не менее 25 сапог, чтобы среди них был хотя бы один синий. Суммарно получается не меньше 26.

Если Петр принес 9 сапог или меньше, то они могут быть все синие, поэтому, а значит Василию потребуется принести не менее 25 сапог, чтобы среди них был хотя бы один синий. Суммарно опять получается не меньше 26.

Если Петр принес больше 9, но меньше 19 сапог, то среди них может не быть ни одного черного. Тогда Василию нужно взять минимум 20 сапог, чтобы гарантировано принести хотя бы один цветной. Петр принес не меньше 10 сапог, и суммарно их получится минимум 30.

Итак, если Петр взял меньше 19 сапог или Василий взял меньше 6 сапог, то суммарно сапог получается только больше.

$\boxed{6}$ Аня умеет писать только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Она написала 21-значное число. Докажите, что умный Саша сможет вычеркнуть из Аниного числа несколько цифр так, чтобы оставшееся число делилось без остатка на 7.

Решение 1: Допустим, в Анином числе есть цифры 1, 2, 4. Пусть первая из этих цифр — это 1. Тогда после нее есть 4, и можно оставить число 14. Если первая из этих цифр — это 2, то можно оставить 21, а если 4 — то 42.

Аналогично, если в Анином числе есть цифры 3, 5, 6, то можно оставить 35, 56 или 63.

Теперь допустим, что в Анином числе встречаются максимум две цифры из набора 1, 2, 4 и максимум две цифры из набора 3, 5, 6. Тогда в нем не более четырех разных цифр. Если каждой цифры не более пяти, то всего цифр не более 20. Значит, какая-то цифра повторяется не менее шести раз. Значит, можно оставить число $\overline{aaaaaa}$, которое делится на 7 (потому что $111111 = 15873 \cdot 7$).

Решение 2: Будем вычеркивать из нашего числа $\overline{abcd\ldots stu}$ первую цифру, первые две цифры, первые три цифры... и так далее и следить за остатком от деления на 7. Рано или поздно этот остаток повторится.

То есть окажется, что, например, числа $\overline{bcdef\ldots stu}$ и $\overline{ef\ldots stu}$ дают одинаковые остатки от деления на 7. Значит, разность этих чисел, равная $\overline{bcd00\ldots000}$, делится на 7. Нули на конце на делимость на 7 не влияют, поэтому $\overline{bcd}$ тоже делится на 7. В других случаях рассуждения полностью аналогичны.

$\boxed{7}$ Из 12 монет одна фальшивая, она отличается от настоящей по весу неизвестно в какую сторону. Чашечные весы работают правильно, если груз на одной из чаш тяжелее, чем на другой, а при равенстве могут показать что угодно. Как найти фальшивую монету за пять взвешиваний?

Идея решения: Будем каждый раз взвешивать так, чтобы фальшивая монета точно была на весах. Тогда равенства точно не будет, и показаниям весов можно будет доверять.

Решение: Склеим монеты в группы по 3.

Взвесим 2 группы на одной чаше и 2 на другой. Назовем группы на более легкой чаше А и Б, а на более тяжелой В и Г (АБ $<$ ВГ). После этого взвесим АВ с БГ, а потом АГ с БВ. Разберем четыре случая:

• АВ $<$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда все группы, кроме А, побывали и на более легкой, и на более тяжелой чаше, поэтому фальшивых монет в них нет. Следовательно, фальшивая монета в группе А, и она легче настоящей.

• АВ $<$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе Г (которая все три раза была на более тяжелой чаше) и она тяжелее настоящей.

• АВ $>$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе В (которая все три раза была на более тяжелой чаше) и она тяжелее настоящей.

• АВ $>$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе Б (которая все три раза была на более легкой чаше) и она легче настоящей.

Допустим, фальшивая монета в группе А и легче настоящей (остальные случаи разбираются аналогично). Расклеим монеты в группе и добавим к ним еще одну точно настоящую из другой группы. Взвесим две монеты на одной чаше весов и две на другой, фальшивая на более легкой чаше. Теперь взвесим две монеты с более легкой чаши друг с другом, фальшивой будет более легкая.