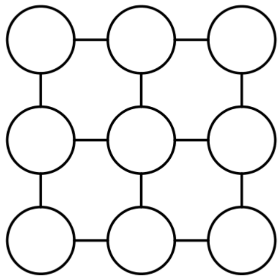
II Открытая олимпиада по математике школы №1543

7 класс

5 февраля 2023



$\boxed{1}$ Паук поймал Муху-Цокотуху в квадратную паутину (на рисунке справа) и предлагает ей сыграть в игру. Муха назовёт девять различных натуральных чисел, а Паук расставит их в кружочки на паутине так, как захочет. Если в каждой паре кружочков, соединённых линией, одно из чисел будет делиться на другое без остатка, то Паук отпустит Муху. Но если хотя бы в одном месте это правило нарушится, то её съедят. Сможет ли Муха спастись?

Ответ: сможет. Решение: Муха может назвать, например, числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. В любой паре чисел из этих девяти одно делится на другое, поэтому при любой расстановке чисел в кружочки условие Паука будет выполнено.

$\boxed{2}$ У Вовы есть маленький кирпичик, сумма длин всех его рёбер равна 100 см. А у Олега есть кирпич побольше, его рёбра на 3 см длиннее соответствующих рёбер Вовиного кирпича. Вова и Олег покрасили свои кирпичи сиреневой краской. На сколько больше краски потратил Олег, чем Вова, если на покраску 1 см^2 уходит 0,1 г краски?

Ответ: на 35,4 г больше.

Решение: Пусть ребра Вовиного кирпича равны a, b, c см. Тогда $4a+4b+4c=100$ и $a+b+c=25$. Площадь его поверхности равна $2(ab+bc+ca)$. У Олега ребра кирпича равны $a+3$, $b+3$, $c+3$ см. Площадь поверхности этого кирпича равна

$$2\big((a+3)(b+3)+(b+3)(c+3)+(c+3)(a+3)\big) =$$

$$= 2(ab+bc+ca)+12(a+b+c)+54 = 2(ab+bc+ca)+354.$$

Таким образом, Олег потратит на $354\cdot 0{,}1 = 35{,}4$ г краски больше.

$\boxed{3}$ В классе 25 учеников. Каждый назвал число своих друзей среди одноклассников. Оказалось, что каждый ошибся в подсчётах ровно на 1 в ту или другую сторону. Могла ли сумма названных чисел быть равной 100?

Ответ: не могла. Решение: Если бы никто из учеников не ошибся, то сумма названных чисел была бы равна удвоенному числу пар друзей, т.е. была бы чётной. Так как число учеников нечётно, и каждый из них ошибся на 1, то сумма названных чисел нечётна, поэтому она не могла быть равна 100.

$\boxed{4}$ На складе есть два тёмных чулана: в первом хранятся сапоги на левую ногу: 15 чёрных, 9 синих и 9 зелёных. А во втором хранятся сапоги на правую ногу: 19 чёрных, 5 синих и 5 зелёных. Пётр приносит несколько сапог из первого чулана, а Василий из второго. Какое минимальное количество сапог им нужно принести, чтобы из них гарантировано можно было составить хотя бы одну пару? (За сапогами Пётр и Василий идут одновременно, набирают их не глядя, но перед этим они могут договориться, сколько именно сапог каждый должен принести.)

Ответ: 25 сапог. Решение: Петр приносит 19 левых сапог, а Василий — 6 правых. Тогда пара обязательно соберется. Действительно, Петр обязательно принес хотя бы один черный сапог и хотя бы один синий или зеленый. Василий мог принести черный сапог, и тогда есть черная пара. А если он черных сапог не приносил, то он принес хотя бы один синий и хотя бы один зеленый сапог, и тогда есть пара с цветным сапогом Петра.

Покажем, что 25 сапог — это минимальное количество.

Если Василий принес 5 сапог или меньше, то они могут быть все синие, а значит Петру нужно принести не менее 25 сапог, чтобы среди них был хотя бы один синий. Суммарно получается не меньше 26.

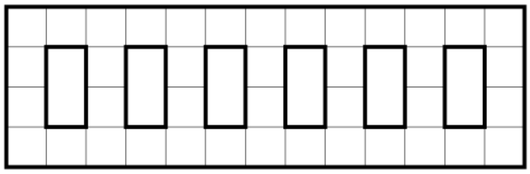
Если Петр принес 9 сапог или меньше, то они могут быть все синие, поэтому, а значит Василию потребуется принести не менее 25 сапог, чтобы среди них был хотя бы один синий. Суммарно опять получается не меньше 26.

Если Петр принес больше 9, но меньше 19 сапог, то среди них может не быть ни одного черного. Тогда Василию нужно взять минимум 20 сапог, чтобы гарантировано принести хотя бы один цветной. Петр принес не меньше 10 сапог, и суммарно их получится минимум 30.

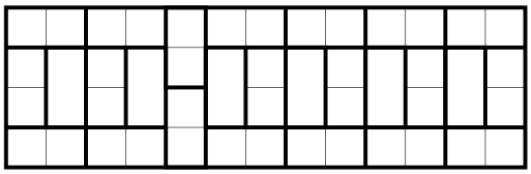
Итак, если Петр взял меньше 19 сапог или Василий взял меньше 6 сапог, то суммарно сапог получается только больше.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Существует ли клетчатая фигурка, которую можно разрезать на доминошки 1×2 ровно 1543 способами?

Ответ: существует. Решение: Прямоугольник $4 \times (2n-1)$, в котором вырезали ровно $n-1$ дырку 2×1 можно разрезать на доминошки ровно n способами.

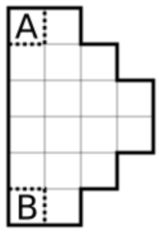


Поскольку прямоугольник имеет нечётную длину, то весь верхний ряд не может быть заполнен горизонтальными доминошками. Значит, в одном из n столбцов между дырками расположено две вертикальные доминошки. Оставшаяся часть разрезается однозначно как изображено на картинке. Так получается n способов разрезания.

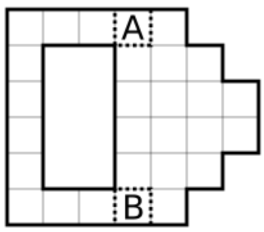


Путь к решению: Научимся пририсовывать к достаточно «хорошим» фигуркам дополнительную часть так, чтобы увеличить количество способов разрезания на 1.

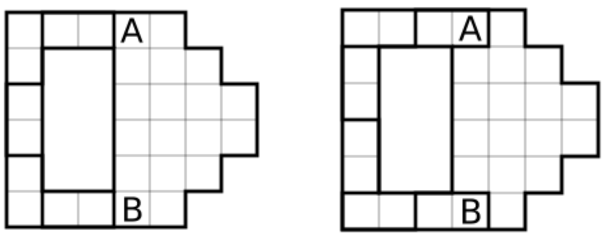
Пусть фигурку можно разрезать n способами. Допустим, что в ней есть две такие клетки A и B разных цветов (при шахматной раскраске), что если вырезать их, то оставшуюся фигурку можно разрезать на доминошки единственным способом.



Пририсуем к фигурке «дугу» толщиной в одну клетку, соединяющую A и B.

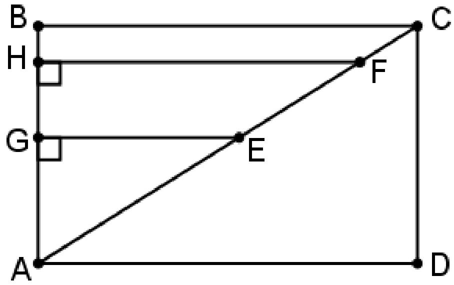


Посчитаем, сколько есть способов разрезать новую фигурку. Есть n разрезаний, когда дуга разрезается отдельно, а старая фигурка отдельно (на картинке слева). И есть ровно одно разрезание, в котором доминошки располагаются на стыке клеток A и B и дуги (на картике справа). Итого, новую фигурку можно разрезать $n+1$ способом.

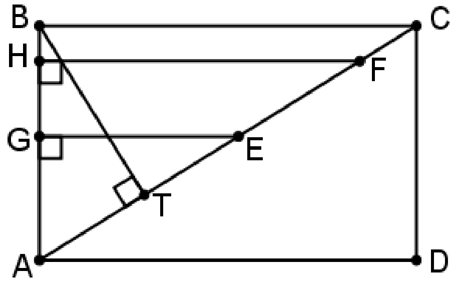


Требуемую фигурку можно собрать, пририсовывая такие дуги друг к другу.

6 На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $AE=AB$ и $AF=AD$. Из точек E и F на сторону AB опущены перпендикуляры EG и FH. Докажите, что $AG+FH=AC$.



Решение: Опустим перпендикуляр BT на диагональ AC.



У прямоугольных треугольников ABT и AEG равны гипотенузы ($AB=AE$ по условию) и есть общий угол $\angle A$. Поэтому $\triangle ABT=\triangle AEG$ и следовательно $AT=AG$. Поскольку $BC\perp AB$ и $FH\perp AB$, то $FH\parallel BC$. Диагональ AC — секущая при этих параллельных прямых. Тогда $\angle AFH=\angle TCB$ как соответственные углы.

В прямоугольных треугольниках AFH и BCT равны гипотенузы $AF=AD=BC$ и равны острые углы $\angle AFH=\angle TCB$. Поэтому $\triangle AFH=\triangle BCT$ и $FH=CT$. Значит, $AG+FH=AT+TC=AC$.

7 Из 12 монет одна фальшивая, она отличается от настоящей по весу неизвестно в какую сторону. Чашечные весы работают правильно, если груз на одной из чаш тяжелее, чем на другой, а при равенстве могут показать что угодно. Как найти фальшивую монету за пять взвешиваний?

Идея решения: Будем каждый раз взвешивать так, чтобы фальшивая монета точно была на весах. Тогда равенства точно не будет, и показаниям весов можно будет доверять.

Решение: Склеим монеты в группы по 3.

Взвесим 2 группы на одной чаше и 2 на другой. Назовем группы на более легкой чаше А и Б, а на более тяжелой В и Г (АБ $<$ ВГ). После этого взвесим АВ с БГ, а потом АГ с БВ. Разберем четыре случая:

- АВ $<$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда все группы, кроме А, побывали и на более легкой, и на более тяжелой чаше, поэтому фальшивых монет в них нет. Следовательно, фальшивая монета в группе А, и она легче настоящей.
- АВ $<$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе Г (которая все три раза была на более тяжелой чаше) и она тяжелее настоящей.
- АВ $>$ БГ, АГ $<$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе В (которая все три раза была на более тяжелой чаше) и она тяжелее настоящей.
- АВ $>$ БГ, АГ $>$ БВ. Тогда фальшивая монета в группе Б (которая все три раза была на более легкой чаше) и она легче настоящей.

Допустим, фальшивая монета в группе А и легче настоящей (остальные случаи разбираются аналогично). Расклеим монеты в группе и добавим к ним еще одну точно настоящую из другой группы. Взвесим две монеты на одной чаше весов и две на другой, фальшивая на более легкой чаше. Теперь взвесим две монеты с более легкой чаши друг с другом, фальшивой будет более легкая.