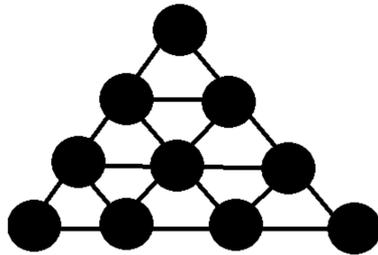


Решения задач отборочного тура

Уважаемый участник!

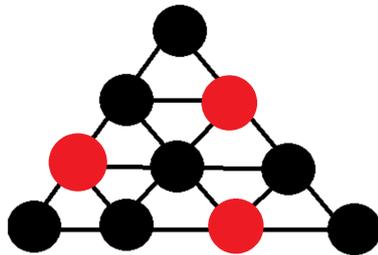
Ниже Вы найдете набор из 13 задач с краткими решениями (упорядоченных по алфавиту), среди которых есть 5 задач, доставшихся Вам. В некоторых задачах у Вас могли быть другие числа, на ход решения это не влияет, только на вычисления. Не все из этих задач могли, даже теоретически, вам попасться например, задача с картинкой про «рыбку» предлагалась только в четвёртом классе.

1 В боулинге стоит 10 белых кеглей, как показано на рисунке ниже (один кружок — одна кегля). Кегли, стоящие рядом, соединены линиями. Какое наименьшее число кеглей надо перекрасить в красный так, чтобы каждая кегля или сама была красной или имела бы красного соседа?



Ответ: 3.

Решение. Пример изображен на рисунке.



Меньше 3 нельзя, потому что для всех угловых кеглей красные кегли должны быть разными.

2 В заборе пять досок. Каждую доску надо покрасить в синий, зелёный или жёлтый цвет, причём соседние доски должны быть покрашены в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 48.

Решение. Первую доску можно покрасить в 3 цвета, а каждую следующую в 2 (не в цвет предыдущей доски). То есть вариантов $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 16 = 48$.

3 В олимпиаде было 24 задачи: 18 в первом туре и 6 во втором. Каждую задачу первого тура члены жюри проверяли по двое, а каждую задачу второго тура проверяли по трое. В итоге оказалось, что каждый член жюри проверил ровно по 6 задач. Сколько всего членов в жюри этой олимпиады?

Ответ: 9.

Решение. Всего было проверено $18 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 54$ задачи (с повторениями). Каждый проверил 6 задач, значит всего людей было $54 : 6 = 9$ человек.

4 В числе 20211543 вычеркнули 4 цифры. Какое наименьшее четырёхзначное число могло получиться? А какое наибольшее? Запишите в ответ их сумму.

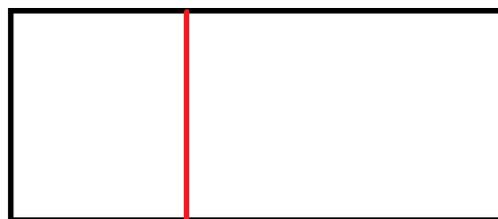
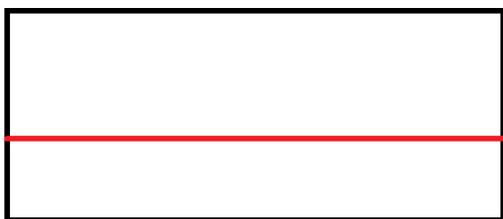
Ответ: 3686.

Решение. Наименьшее число, которое можно было получить, равно 1143, а наибольшее равно 2543. Их сумма равна $1143 + 2543 = 3686$.

5 Васе и Гоше дали по одинаковому прямоугольнику из картона. Вася разрезал свой прямоугольник на два прямоугольника с периметрами 82 и 104. А Гоша разрезал свой прямоугольник на два прямоугольника с периметрами 92 и 112. Найдите периметр исходного прямоугольника.

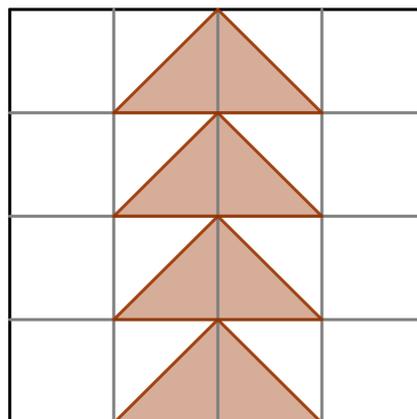
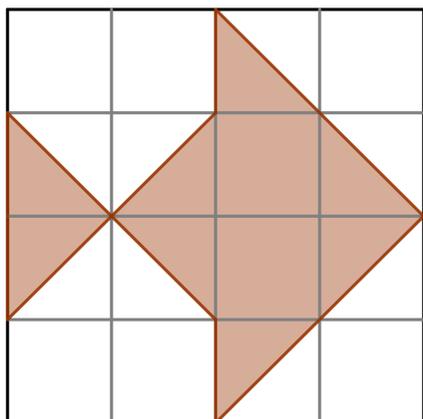
Ответ: 130.

Решение. Понятно что прямоугольник можно резать на два других прямоугольника или вдоль одной стороны, или вдоль другой (см. рис.).



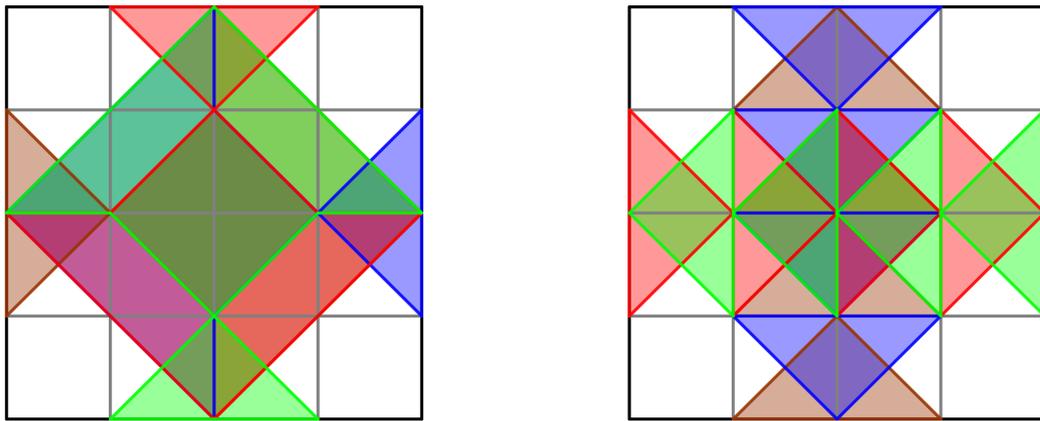
Тогда сумма периметров двух таких прямоугольников — это периметр исходного прямоугольника плюс удвоенная сторона. Значит сумма всех четырех периметров из условия это два периметра прямоугольника, и еще удвоенная одна и другая стороны, то есть плюс еще один периметр прямоугольника. В сумме получится 3 периметра прямоугольника. Посчитаем сумму и разделим её на 3, чтобы получить ответ $(82 + 104 + 92 + 112) : 3 = 390 : 3 = 130$.

6 Есть квадратный штампик в виде рыбки (в другом варианте ёлочки). Сначала его намазали синей краской и сделали отпечаток в квадрате справа так, чтобы отпечатанная синяя рыбка смотрела влево. Потом штампик намазали зелёной краской и отпечатали в том же квадрате так, чтобы зеленая рыбка смотрела вверх. Затем в том же квадрате отпечатали ещё и красную рыбку, смотрящую вправо, и жёлтую рыбку, смотрящую вниз. Найдите площадь (в см^2) части квадрата, которая осталась белой. Сторона клетки равна 1 см.



Ответ: 6.

Решение. На картинке видно, что будет, если отпечатать штампики 4 раза.



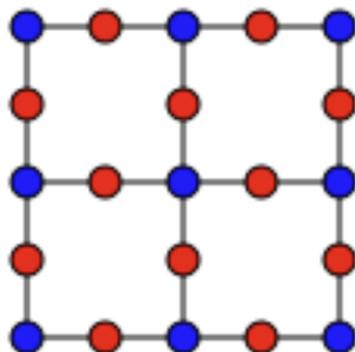
Видно, что оба раза остаются одни и те же кусочки, состоящие из 4 клеток и 8 четвертинок клеток. Площадь одной клетки равна 1, поэтому площадь белой части равна 6 см^2 .

7 Знаменитый преступник профессор Мориарти проник в банк, но так и не смог подобрать трёхзначный код от сейфа. Шерлок Холмс по отпечаткам пальцев обнаружил, что Мориарти успел попробовать комбинации 543, 142 и 562, после чего его спугнул охранник. Оказалось, что в каждом из этих вариантов профессор угадал ровно одну цифру кода. Узнав это, Шерлок Холмс тут же сказал код от сейфа. Какой?

Ответ: 163.

Решение. Рассмотрим 1 позицию. Если там стоит 5, то на второй позиции не могут стоять цифры 4 и 6, а на третьей 3 и 2 (из чисел 543 и 562). Но тогда в числе 142 нет ни одного правильного знака. Аналогично на 2 позиции не может стоять 4, а на третьей не может стоять 2. Тогда в каждом числе остается всего один вариант для правильной цифры — в числе 543 это цифра 3, в числе 142 это цифра 1, а в числе 562 это цифры 6. Значит код 163.

8 На клетчатом листе бумаги нарисовали квадрат 20×20 . У каждой из клеток, входящих в этот квадрат, синим цветом отметили вершины, а красным — середины сторон. Найдите число отмеченных точек. (На рисунке изображено, как бы это выглядело в случае квадрата 2×2).



Ответ: 1281.

Решение. Синих точек будет $21 \cdot 21 = 441$. А красные образуют 21 горизонтальную линию, по 20 точек, и столько же вертикальных, то есть $2 \cdot 20 \cdot 21 = 840$. То есть всего точек было $840 + 441 = 1281$.

9 Одним летним днём Аня, Боря и Вася купили много арбузов. Аня и Боря купили по 6, а Вася тоже арбузы покупал, но сейчас уже не помнит сколько. На следующий день Аня подарила Боре, Боря подарил Васе, а Вася подарил Ане по одному арбузу. После этого средний вес арбузов Ани уменьшился на 2 кг, средний вес арбузов Бори уменьшился на 3 кг, а средний вес арбузов Васи увеличился на 6 кг. Сколько арбузов купил Вася?

Ответ: 5.

Решение. Если у Ани средний вес упал на 2 кг, то полученный арбуз на $2 \cdot 6 = 12$ кг легче чем тот, что она отдала Боре. При это у Бори средний вес уменьшился на 3 кг, то он отдал на $3 \cdot 6 = 18$ кг больше чем получил. Значит Боря получил арбуз, который на 30 кг тяжелее того, что он отдал. Мы знаем что его средний вес увеличился на 6 кг, а тогда у него было $30 : 6 = 5$ арбузов.

10 По городу разнёсся слух, что вот-вот закончится гречка и к магазину выстроилась очередь из простых людей и энтузиастов. Первый человек из очереди купил 1 кг гречки, второй — 2 кг, а каждый следующий брал в два раза больше, чем предыдущий, если был обычным человеком, и в три раза больше, если был энтузиастом. Последний человек в очереди взял 2592 кг гречки. Сколько людей было в очереди изначально?

Ответ: 10.

Решение. Мы знаем что каждый следующий брал в 2 или в 3 раза больше гречки. Значит каждый взял произведение скольких-то двоек и троек, причём у каждого следующего человека сумма степеней на 1 больше. $2592 = 2^5 \cdot 3^4$, сумма степеней равна 9, то есть 2592 кг гречки взял десятый человек.

11 Саша зашёл в лавку старинных часов и увидел, что четыре циферблата показывают время: 4:15, 4:26, 4:21, 4:24. Продавец сообщил ему, что одни из этих часов ошибаются не более чем на 7 минут, какие-то другие — не более, чем на пять минут, третьи — не более чем на две минуты, а четвёртые — не более чем на минуту. Помогите Саше понять, сколько сейчас времени. Выведите сумму числа часов и минут текущего времени.

Ответ: 26.

Решение. Заметим что между 4:15 и 4:26 разница 11 минут. Тогда правильное время обязательно попадает в промежуток между этими часами, причём одни из этих часов отличаются не более чем на 7 минут, а другие не более чем на 5 минут (иначе не получается). Значит возможные варианты 4:19, 4:20, 4:21 или 4:22. Перебираем эти варианты и получаем что подходит только вариант 4:22, а тогда ответ $4 + 22 = 26$.

12 Шаман племени диких математиков объявил «ужасающими» числа, в которых встречаются две подряд чётные или две подряд нечётные цифры. Числа же, в которых встречаются все чётные цифры (которые существуют), шаман объявил «величественными». Найдите наименьшее «величественное» число, которое не является «ужасающим».

Ответ: 210141618.

Решение. В величественном числе должно быть минимум 5 чётных цифр. Поскольку они не стоят подряд, то между ними должно быть минимум 4 нечётные, а значит всего будет минимум 9 цифр. Тогда для минимальности первая цифра чётная, чётные и нечётные чередуются, все нечётные цифры — единицы, а чётные идут в порядке 2, 0, 4, 6, 8. Получается число 2101416181.

13 Школьников, пришедших на олимпиаду, рассадили по двум корпусам школы, и преподаватели пытаются их посчитать:

- Александр Вячеславович: «В старом корпусе школьников больше 44. А в новом корпусе не больше 64».
- Инесса Владимировна: «В старом корпусе школьников меньше 47. А в новом корпусе ровно 64».
- Анна Алексеевна: «В старом корпусе школьников ровно 46. А в новом корпусе не меньше 65».

Известно, что один из преподавателей оба раза ошибся, а два других оба раза были правы. Сколько всего школьников пришло на олимпиаду?

Ответ: 109.

Решение. Рассмотрим отдельно старый корпус. АВ говорит что там > 44 школьников. ИВ говорит что < 47 , а АА говорит что $= 46$, причём только один из них ошибся. Тогда подходит только число 45, а АА ошибается.

Рассмотрим новый корпус. Мы знаем что ИВ говорит правду, то есть школьников в новом корпусе ровно 64. Тогда всего школьников $45 + 64 = 109$.